

# Spis treści

Od autora .....	9
Wstęp .....	11
<b>1. Działania i struktury algebraiczne .....</b>	<b>13</b>
1.1. Działania i ich własności .....	13
1.1.1. Działania .....	13
1.1.2. Własności działań .....	15
1.1.3. Działania zewnętrzne .....	22
1.2. Struktury algebraiczne i ich homomorfizmy .....	23
1.2.1. Struktury algebraiczne .....	23
1.2.2. Homomorfizmy struktur algebraicznych .....	24
1.3. Zgodność relacji równoważności z działaniami, struktury ilorazowe .....	27
1.3.1. Zgodność relacji równoważności z działaniem, działanie indukowane .....	27
1.3.2. Zgodność relacji równoważności ze strukturą algebraiczną, struktura ilorazowa .....	30
<b>2. Grupy .....</b>	<b>33</b>
2.1. Grupy — pojęcia wstępne .....	33
2.1.1. Grupy — definicje, przykłady, podstawowe własności .....	33
2.1.2. Podgrupy .....	41
2.1.3. Warstwy .....	44
2.1.4. Dzielniki normalne i grupy ilorazowe .....	48
2.1.5. Elementy sprzężone .....	54
2.2. Homomorfizmy grup .....	54
2.2.1. Homomorfizmy grup — definicja i podstawowe własności .....	54
2.2.2. Izomorfizmy grup .....	58
2.2.3. Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie grup .....	63
2.2.4. Inne twierdzenia o izomorfizmach grup .....	66
2.2.5. Grupy $\text{Aut}(G)$ oraz $\text{Inn}(G)$ .....	67
2.3. Grupy cykliczne i grupy permutacji .....	69
2.3.1. Grupy cykliczne .....	69
2.3.2. Grupy permutacji .....	76
2.4. Produkty i sumy proste grup, sumy proste podgrup .....	85
2.4.1. Produkty i sumy proste grup .....	85

2.4.2.	Suma prosta dwóch podgrup .....	89
2.4.3.	Suma prosta dowolnej liczby podgrup .....	91
2.4.4.	Struktura skończonych grup abelowych .....	93
2.4.5.	Grupy wolne .....	97
2.4.6.	Słowa, grupy słów .....	98
2.4.7.	Relacje między generatorami, grupy o skończonym opisie .....	100
2.4.8.	Wolne grupy abelowe .....	105
2.5.	Działania grup w zbiorach, $p$ -grupy i grupy rozwiązalne .....	118
2.5.1.	Działania grup w zbiorach .....	118
2.5.2.	$p$ -grupy skończone i twierdzenie Sylowa .....	122
2.5.3.	Grupy rozwiązalne .....	123
2.6.	Zadania różne .....	125
<b>3.</b>	<b>Pierścienie</b> .....	<b>126</b>
3.1.	Pierścienie — pojęcia wstępne .....	126
3.1.1.	Pierścienie — definicja, przykłady i podstawowe własności .....	126
3.1.2.	Elementy odwracalne i dzielniki zera w pierścieniach .....	129
3.1.3.	Dziedziny całkowitości .....	131
3.1.4.	Ciała .....	132
3.1.5.	Podpierścienie .....	135
3.1.6.	Homomorfizmy i izomorfizmy pierścieni .....	138
3.2.	Pierścienie wielomianów .....	142
3.2.1.	Pierścienie wielomianów — definicje, przykłady, podstawowe własności .....	142
3.2.2.	Dzielenie wielomianów z resztą .....	145
3.2.3.	Wartość wielomianu, funkcje wielomianowe .....	148
3.2.4.	Wielomiany interpolacyjne Lagrange'a i Newtona .....	149
3.2.5.	Pierwiastki wielomianów .....	151
3.2.6.	Pochodna wielomianu .....	152
3.2.7.	Rugowniki i wyróżniki .....	155
3.2.8.	Wielomiany wielu zmiennych .....	158
3.2.9.	Wielomiany symetryczne .....	160
3.2.10.	Układy równań algebraicznych .....	166
3.2.11.	Redukcja wielomianu według modułu .....	169
3.2.12.	Pierścienie formalnych szeregów potęgowych .....	170
3.3.	Ideały i pierścienie ilorazowe .....	172
3.3.1.	Ideały .....	172
3.3.2.	Pierścienie noetherowskie .....	177
3.3.3.	Chińskie twierdzenie o resztach .....	179
3.3.4.	Ideały pierwsze i ideały maksymalne .....	182
3.3.5.	Pierścienie lokalne .....	183
3.3.6.	Pierścienie ilorazowe .....	184
3.3.7.	Pierwsze twierdzenie o izomorfizmie pierścieni .....	190
3.4.	Ciała ułamków i pierścienie ułamków .....	194
3.4.1.	Ciała ułamków .....	194
3.4.2.	Pierścienie ułamków .....	198
3.5.	Teoria podzielności w dziedzinach całkowitości .....	200
3.5.1.	Relacje podzielności i stowarzyszenia .....	200
3.5.2.	Elementy rozkładalne i nierozkładalne .....	204
3.5.3.	Jednoznaczność rozkładu na czynniki nierozkładalne .....	206
3.5.4.	Elementy pierwsze .....	209

3.5.5. Największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność.....	210
3.5.6. Pierścienie euklidesowe.....	214
3.5.7. Zastosowanie jednoznaczności rozkładu do rozwiązywania pewnych równań w liczbach całkowitych.....	221
3.5.8. Teoria podzielności w pierścieniach wielomianów.....	222
3.5.9. Rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste.....	225
3.5.10. Pewne zastosowanie szeregów potęgowych.....	229
<b>4. Ciała.....</b>	<b>233</b>
4.1. Rozszerzenia ciał, elementy algebraiczne.....	233
4.2. Ciała skończone.....	241
4.2.1. Elementy ciała skończonego i działania na nich.....	241
4.2.2. Ślad i norma elementu ciała skończonego.....	244
<b>5. Rozwiązania i odpowiedzi.....</b>	<b>245</b>
Do rozdziału 1.....	245
Do rozdziału 2.....	254
Do rozdziału 3.....	328
Do rozdziału 4.....	385
<b>Spis literatury.....</b>	<b>390</b>
<b>Skorowidz.....</b>	<b>391</b>

Aty może korzystać z rozdziałów 2-4, nie ma potrzeby uprzedniego przetworzenia całego rozdziału 1 — w zasadzie wystarczy zapoznać się z jego punktami 1.1 i 1.2.

Pracując nad tą książką, nie mogłem nie korzystać z wcześniej wydanych zbiorów zadań oraz z podręczników do algebry abstrakcyjnej autorów polskich i zagranicznych (zob. bibliografię). Jednakże pewna część zamieszczonych tu zadań pochodzi ode mnie. Ponadto wszędzie tam, gdzie to było możliwe, sam dobieierałem odpowiednie dane.

Pragnę bardzo serdecznie podziękować panu mgr. Józefowi Mąkowskiemu, który przez cały czas pisania tej książki dzielił się ze mną swoimi cennymi uwagami. Za liczne i słuszne uwagi gorąco dziękuję również recenzentom tej książki panu dr. hab. Andrzejowi Śladkowi oraz panu dr. hab. Michałowi Szurkowi. Wiele cennych uwag przekazali mi panowie dr. Witold Więstaw i dr. Tadeusz Fryśka, za co jestem im niezmiernie wdzięczny. Dzięki wspomnianym uwagom znacznie ulepszyłem tekst. Panu dr. T. Fryśce dziękuję ponadto za pomoc w przygotowaniu komputerowego tekstu tego zbioru w systemie  $\text{\LaTeX}$ . Pan mgr. Maciej Radziejewski udostępnił mi kilka zadań swojego pomysłu (m. in. zad. 475 i 647), za co Mu bardzo dziękuję.